Informatique Appliquée au Calcul Scientifique 1

Séance 14

TP : Approximation du nombre Pi

d'après José Ouin

Le nombre Pi, noté π, est le rapport constant de la circonférence d'un cercle à son diamètre dans un plan euclidien. On peut également le définir comme le rapport de la superficie d'un disque au carré de son rayon.

$$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510582\ldots$$

Il existe un moyen mnémotechnique pour retrouver les décimales de π. Il suffit de compter le nombre de lettres de chacun des mots d'un texte donnée. Si ce nombre est supérieur à 9, alors la décimale est 0.

Mot	Que	j'	aime	à	faire	connaître	ce	nombre	utile	aux	sages
Longueur	3,	1	4	1	5	9	2	6	5	3	5

Voici un exemple de texte permettant de retrouver les décimales de π :

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages ! /3.1415926535
Immortel Archimède, artiste, ingénieur, /8979
Qui de ton jugement peut priser la valeur ? /32384626
Pour moi ton problème eut de pareils avantages. /43383279…

Jadis, mystérieux, un problème bloquait
Tout l'admirable procédé, l'oeuvre grandiose
Que Pythagore découvrit aux anciens Grecs.
Ô quadrature ! Vieux tourment du philosophe

Insoluble rondeur, trop longtemps vous avez
Défié Pythagore et ses imitateurs.
Comment intégrer l'espace plan circulaire ?
Former un triangle auquel il équivaudra ?

Nouvelle invention : Archimède inscrira
Dedans un hexagone ; appréciera son aire
Fonction du rayon. Pas trop ne s'y tiendra :
Dédoublera chaque élément antérieur ;

Toujours de l'orbe calculée approchera ;
Définira limite ; enfin, l'arc, le limiteur
De cet inquiétant cercle, ennemi trop rebelle
Professeur, enseignez son problème avec zèle.

Il s'agit de créer un programme renvoyant une valeur approchée du nombre π.
L'utilisateur doit indiquer le nombre n de termes à considérer. Pour chacune des approximations proposées ci-après :
1. Écrire l'algorithme permettant de déterminer une approximation du nombre π.
2. Écrire le programme correspondant.
3. Comparer les valeurs de n qu'il faut choisir pour obtenir les p premières décimales exactes du nombre π avec :

- p=15 pour les formules de Viète, de Borwein et d'Euler ;
- p=6 pour la formule de Wallis.

On donne les 14 décimales exactes du nombre π: $\pi \approx 3{,}14159265358979$

Formule de Viète (1692):

$$\pi = 2 \times (\frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \times \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}} \times \dots)$$

On peut aussi l'écrire :

$$\pi = 2 \times \prod_{i=1}^{\infty} \frac{2}{a_i} \; avec \; a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \; et \; a_0 = \sqrt{2}$$

Formule de Wallis (1655):

$$\pi = 2 \times \prod_{i=1}^{\infty} \frac{4n^2}{4n^2 - 1} = 2 \times \frac{4}{3} \times \frac{16}{15} \times \frac{36}{35} \times \dots$$

Formule de Borwein (1985):

$$\begin{cases} x_0 = \sqrt{2}\,;\; y_1 = \sqrt{\sqrt{2}} \; et \; u_0 = 2 + \sqrt{2} \\ x_{n+1} = \dfrac{1 + x_n}{2\sqrt{x_n}} \;; n \geq 0 \\ y_{n+1} = \dfrac{1 + x_n . y_n}{(1 + y_n)\sqrt{x_n}} \;; n \geq 1 \\ u_{n+1} = u_n \times \dfrac{1 + x_{n+1}}{1 + y_{n+1}} \;; n \geq 0 \end{cases}$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers π par valeurs inférieurs.

Formule d'Euler (1735) :

$$\pi = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k (k!)^2}{(2k+1)!}$$

Bonus : Formule de Ramanujan (1910 démontrée en 1985)

$$\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(4k)!}{(k!)^4}\times\frac{1103+26390k}{(4\times 99)^{4k}}$$

Cours B MOREAU